EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

40e JAARGANG 1964/1965

II—1 OKTOBER 1964

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5.50 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen *f* 5.50 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

EEN BESCHOUWING OVER FUNCTIE-NOTATIE

door

Prof. Dr. A. NIJENHUIS
Philadelphia

§ 1. Recreatie - en een paradox

In de rubriek „Recreatie" van een recente aflevering van dit tijdschrift [1]) poneert P. G. J. Vredenduin dat $\frac{d}{dx}x^2$ geen zuivere notatie is. Immers, zo redeneert hij, als $f(x) = \frac{d}{dx}x^2$, dan zou $f(3)$ gelijk zijn aan $\frac{d}{d3}3^2$, aan $\frac{d}{dx}3^2$ of iets dergelijks.

In een daarop volgende „Korrel" [2]) voert Vredenduin aan dat de substitutie niet uitgevoerd mag worden als aangegeven. Voor een zuiverder formulering vervangt hij $\frac{d}{dx}$ door ϕ, opmerkende dat beide opereren op hele functies (dus niet op individuele functiewaarden), en vervangt x^2 door $g(x)$. Dan is $f = \phi(g)$ en $f(3) = (\phi(g))(3)$, wat niet hetzelfde is als $\phi(g(3))$. Het laatste zou volgens hem met $\frac{d}{dx}3^2$, $\frac{d}{d3}3^2$ of iets dergelijk onzinnigs corresponderen.

Hoewel ik me in principe met Vredenduin's standpunt kan verenigen, geloof ik toch dat zekere preciseringen gewenst zijn. Daar deze preciseringen niet gebonden zijn aan dit bepaalde probleem, maar ook algemeen van belang zijn door de invoering van zuiverder notaties voor functies en hun interpretatie, is het wellicht de moeite waard een verdere discussie hierover te stimuleren.

§ 2. Wat is x^2?

Op de vraag wat x^2 betekent, zullen velen verschillend reageren. Een eerste-klas VHMO-leerling denkt alleen aan het kwadraat van een niet gespecificeerd getal x; een tweede- of derdeklasser die vergelijkingen aan het oplossen is denkt aan $x^2 = 2$, en noemt x^2

---

[1]) Euclides, **39**, p. 287.
[2]) Euclides, **39**, p. 310.

het kwadraat van een onbekende. Later gaan de gedachten wellicht uit naar de functie die aan ieder getal zijn kwadraat toevoegt.

Terecht wordt de notatie x^2 gebruikt in het eerste geval; immers, x kan van alles zijn: een bepaald getal, een onbekend getal, of ook een willekeurig („veranderlijk") getal.

Heeft de tweede- of derdeklasser een leraar die duidelijke begripsvorming voorstaat, dan zal hij — althans ideaal gesproken — denken aan een notatie als $\{x \mid x^2 = 2\}$, die de speciale rol van x als „onbekende" naar voren brengt.

Wonderlijk genoeg zal een leerling in de hogere klassen niet zo goed voorbereid zijn. Alleen door zijn vroegere stof gedeeltelijk te vergeten, of door aan x een geheel nieuwe betekenis toe te kennen, kan hij met een gerust geweten $\frac{d}{dx}\, x^2 = 2x$ opschrijven. Een logisch juiste formulering in het huidige verband (die men van hem echter niet verwachten kan) is bij voorbeeld: als g een functie is met de eigenschap $g(x) = x^2$, dan is g' de functie met de eigenschap $g'(x) = 2x$. Het behoeft geen betoog dat een dergelijke formulering het echter niet „doet" in de praktijk.

Nu heeft H. Freudenthal in zijn boekje *Exacte Logica* [3]) een notatie voorgesteld voor de „functie x^2", namelijk $\text{Ҁ}_x x^2$. De Ҁ dient hier als „kapstok" voor de index x, en als aanduiding dat de functie $x \rightarrow x^2$ is bedoeld. Duiden we dus g aan met $\text{Ҁ}_x x^2$ en omgekeerd, en dus $g(3)$ met $(\text{Ҁ}_x x^2)(3) = 3^2$, dan is de door Vredenduin gesignaleerde paradox inderdaad verklaard. Immers, voegt de operator D (of ϕ [4])) aan g de afgeleide $Dg = g'$ toe, dan geldt inderdaad

$$D\text{Ҁ}_x x^2 = \text{Ҁ}_x 2x.$$

Daar D een operator op functies is, geldt nu dus

$$(D\text{Ҁ}_x x^2)(3) = (\text{Ҁ}_x 2x)(3) = 2.3.$$

Geen andere methode ter berekening van het linkerlid is nu toelaatbaar.

Het enige — maar principieel hoogst noodzakelijke — dat nodig was voor oplossing van de paradox was de invoering van Ҁ_x en de overeenkomstig gemodifieerde substitutieregel: $(\text{Ҁ}_x f(x))(a) = f(a)$.

Een tweede oplossing van de paradox ligt in een reïnterpretatie van het symbool x, dat ik daarom door **x** (ander lettertype) zal aanduiden. Onder **x** verstaan we dan eenvoudig de identieke af-

---

[3]) Volksuniversiteitsbibliotheek, Haarlem, 1961.

[4]) De notatie d/dx is hier niet op zijn plaats, daar de x in $\text{Ҁ}_x x^2$ een reeds gebonden variabele is.

beelding, dus de functie die aan ieder reëel getal x de waarde x toevoegt [5]; we hebben dus $\mathbf{x}(x) = x$ voor alle reële x. Daar het produkt van reële getallen a en b als ab of $a.b$ geschreven wordt, zullen we ook voor het produkt van functies f en g, verkregen door vermenigvuldiging van de functiewaarden (die immers reële getallen zijn), het symbool fg of $f.g$ gebruiken [6]. Dus geldt dan $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Verder schrijven we natuurlijk f^2 voor ff, enz. Met deze afspraak is dan $\mathbf{x}^2$ de functie die aan x de waarde $\mathbf{x}^2(x) = \mathbf{x}(x)\mathbf{x}(x) = xx = x^2$ toevoegt. De afgeleide van de functie $\mathbf{x}^2$ wordt geschreven $\frac{d}{d\mathbf{x}}\mathbf{x}^2$ of $D\mathbf{x}^2$, en is natuurlijk de functie $2\mathbf{x}$. Substitutie van 3 voor $\mathbf{x}$ is niet toegestaan daar zowel 3 als $\mathbf{x}$ reeds volkomen vastgelegd zijn en verschillende betekenissen hebben. Wèl kunnen we de waarde van de functie $2\mathbf{x}$ in het punt 3 berekenen. Daar D of $\frac{d}{d\mathbf{x}}$ een operator is die op functies werkt, kan $(D\mathbf{x}^2)(3)$ of $\left(\frac{d}{d\mathbf{x}}\mathbf{x}^2\right)(3)$ niet verkregen worden door $\mathbf{x}$ door 3 te vervangen.

Ware $\mathbf{x}$ (zoals x) een willekeurig reëel getal, dan mocht de specialisatie $\mathbf{x} = 3$ (zoals $x = 3$) wèl uitgevoerd worden!

§ 3. Wat is een variabele?

De begrippen die in de vorige paragraaf kort genoemd zijn verdienen verdere toelichting, zowel voor een zuivere begripsvorming in het algemeen, alsook op een didactisch vlak. Daar het algemeen-wetenschappelijke aan het didactische vooraf dient te gaan, en daar het eerste nog geenszins helder geformuleerd is, zal ik de didactiek niet aanraken, hopende dat anderen bereid zijn hierover te zijner tijd hun visie te geven.

Ook wil ik voorlopig niet aan de orde stellen in welke mate een hier experimenteel gebruikte notatie doorgevoerd moet worden in de praktijk van onderwijs en leerboeken. Zo'n vraag past beter aan het einde van een principiële discussie dan aan het begin.

Onder de vele wiskundige begrippen die op alle niveaus gevonden worden, zijn de volgende voor ons van groot belang.

---

[5]) De notatie I of ι (iota) lijkt wellicht passender voor de identieke afbeelding. De lezer zal echter zien dat de $\mathbf{x}$ preferabel is als men tracht de gebruikelijke notaties zoveel mogelijk te benaderen.

[6]) Ik heb hier gebruik gemaakt van een vrij algemeen wenselijk principe volgens welk voor puntsgewijze operaties op functies (zoals produktvorming) dezelfde notatie wordt gebruikt als voor de overeenkomstige operatie in de beeldruimte.

Functies of afbeeldingen. Het voortschrijdende bewustzijn dat wiskunde in feite een studie is van verzamelingen met bepaalde eigenschappen (die ook als verzamelingen gekarakteriseerd kunnen worden), en van afbeeldingen (die zelf óók verzamelingen zijn) van verzamelingen in verzamelingen, heeft geleid tot het binnendringen van verzamelingstheoretische notaties en begrippen in de verschillende delen van de wiskunde. Voor een afbeelding van een verzameling A in een verzameling B schrijft men $f : A \rightarrow B$, waar f de naam van de afbeelding is. Het ouderwetse $f(x)$ $(x \in A)$ is niet alleen langer, het is ook logisch aanvechtbaar en onvollediger. Immers, als x een element van A is, dan is $f(x)$ het beeld daarvan, en niet de afbeelding zelf. Verder zegt de oude notatie niet dat B de waarden van f bevat; wèl daarentegen het weinig interessante feit dat men de naam x gekozen heeft voor een willekeurig element van A. Het aanduiden van de afbeelding door f, en niet door $f(x)$, is een eerste noodzakelijke stap in een begripszuivering.

Willekeurige elementen van een verzameling. In het spreken over een bepaalde afbeelding, bv. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ (de verzameling der reële getallen zal steeds met **R** worden aangeduid), waar $f(x) = x^2 + 5$ voor ieder reëel getal x, is het gebruik van een symbool als x in de juist aangeduide zin onvermijdelijk [7]). Het beschrijven van f zonder de x komt neer op een teruggang tot het doen van wiskunde uitsluitend in volzinnen. Het hoeft dan ook geen betoog dat de x hier een essentiële taak vervult.

Variabelen. Deze term wordt gebruikt in verschillende betekenissen. De eerste is die van „willekeurig element" die we reeds besproken hebben, en waar niets aan toe te voegen valt behalve de opmerking dat het ter vermijding van verwarring gewenst is de term „willekeurig element" dan ook maar te gebruiken. Een tweede betekenis komt voor in de volzin: „In $y = f(x)$ is x de onafhankelijke variabele en y de afhankelijke variabele." De betekenis van deze termen is me tot heden ten dage ontgaan, evenmin als het zogenaamd gelijk zijn van y en $f(x)$ me in dit verband iets zegt. Het enige positieve dat ik kan concluderen uit deze frase is dat blijkbaar f een functie is. Ik stel voor dat we dat dan maar doodgewoon zeggen. — Hiermee hebben we afgedaan met twee tradi-

---

[7]) Daar een functie een toevoeging is van elementen van één verzameling aan die van een andere, is een functie f geheel bepaald door deze verzamelingen en de regel die zegt wat $f(x)$ voor iedere x in de tweede verzameling is. In het huidige voorbeeld is ook de notatie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$: $x \rightarrow x^2 + 5$ gebruikelijk; hij zegt natuurlijk precies hetzelfde.

tionele stituaties waarin het woord „variabele" voorkomt, en in beide een betere terminologie gevonden: „willekeurig element" en „functie".

Een derde betekenis, hoewel nauw verwant aan die van „willekeurig element", is toch van ietwat andere aard. Een nauwkeurige, zij het formele, beschrijving is te vinden in de logische literatuur. Het heeft geen zin van een uitdrukking als $x^2 + 6 = 5x$ te zeggen, dat ze waar is of dat ze onwaar is. Substitueren we voor x een reëel getal, dan ontstaat een uitdrukking, waarvoor het wel zin heeft te zeggen, dat ze waar of dat ze onwaar is. Zo is bv. $x^2 + 6 = 5x$ waar voor $x = 2$ en onwaar voor $x = 10$. Ook heeft het wel zin te zeggen, dat $\exists_x x^2 + 6 = 5x$ waar is, omdat deze uitdrukking niet meer „van x afhangt". Evenzo heeft het zin te zeggen, dat

$$\forall_x \exists_y x^2 - y^2 > x - 1$$

waar is, omdat deze uitdrukking „niet van x en van y afhangt". We noemen in deze twee gevallen x resp. x en y gebonden variabelen. In een uitdrukking als $\exists_x x^2 + y^2 = 1$, is x een gebonden en y een vrije variabele. De symbolen $\exists$ en $\forall$ worden kwantoren [8]) genoemd.

We willen in dit artikel de term kwantor in ruimere zin gebruiken en onder een kwantor elke operator verstaan, waardoor variabelen gebonden worden. Verdere voorbeelden van kwantoren zijn dan:

$\{\cdot\cdot \mid \cdot\cdot\}$	als in	$\{x \mid x^2 = 2\}$,
$\int \cdot\cdot d \cdot\cdot$	als in	$\int_0^1 x^2 dx$,
φ	als in	$\varphi_x x^2$.

De aldus verkregen objecten zijn onafhankelijk van x geworden, en zijn respectievelijk een verzameling, een getal en een functie.

Het lijkt me van belang dat een verdere studie van dit soort variabelen en kwantoren wordt gemaakt vanuit een grondslagentheoretisch standpunt [9]).

Het dient opgemerkt dat de $\frac{d}{dx}$ in de klassieke betekenis géén kwantor is; immers daar is $\frac{d}{dx} x^2$ gelijk aan $2x$, dat nog steeds van

---

[8]) Freudenthal (loc. cit.) heeft ietwat andere notaties voor sommige van de hier genoemde kwantoren. Zonder stelling te nemen tegen zijn keuze heb ik me hier tot meer gebruikelijke notaties beperkt. Voor verdere details is lezing van dit werkje zeer aan te bevelen.

[9]) Een zuiver formalistische aanpak leidt hier uiteraard niet tot enige verdere verdieping van inzicht!

het „veranderlijke getal” x afhangt [10]). Deze halfslachtigheid van de $\frac{d}{dx}$ was juist de aanleiding voor de paradox waarmee dit artikeltje begon.

Men spreekt ook van een „functie van twee variabelen”. Dit overblijfsel uit de mystiek van variabele getallen is wel heel diep geworteld, maar betekent natuurlijk eenvoudig een functie die gedefinieerd is op een deelverzameling van het Cartesische produkt $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ oftewel $\mathbf{R}^2$.

§ 4. Afgeleiden en ijkfuncties

De notatie $\frac{d}{d\mathbf{x}}\mathbf{x}^2$, of algemener, $\frac{df}{d\mathbf{x}}$, heeft een aantal aspecten die we hier willen bespreken. Als uitgangspunt nemen we de volgende definitie van afgeleide. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is een functie; x een (willekeurig) reëel getal. De afgeleide van f in het punt x is dan (als hij bestaat) het getal a met de eigenschap dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zó dat

$$| f(x+h) - f(x) - ah | \leqq \varepsilon | h |$$

voor alle reële h die voldoen aan $| h | < \delta$. — De afgeleide functie f' $\left(\text{of } \frac{df}{d\mathbf{x}}\right)$ is dan gedefinieerd door $f'(x) = a$ voor die x waarvoor zo'n a inderdaad bestaat.

We gebruiken weer $\mathbf{x}$ voor de identieke afbeelding. Dan kan de bovenstaande ongelijkheid ook geschreven worden als

$$| f(x+h) - f(x) - a[\mathbf{x}(x+h) - \mathbf{x}(x)] | \leqq \varepsilon | h |.$$

In deze vorm is het duidelijk dat a (bij benadering) de verhouding is tussen de aangroeiïng van f en die van $\mathbf{x}$ in de omgeving van x. De wijze van benadering wordt op precieze wijze door het rechterlid aangegeven.

In dit geval wordt $\mathbf{x}$ gebruikt als ijkfunctie om de mate van groei van f in (de omgeving van) x te meten. We zouden ook een functie g als ijkfunctie kunnen nemen, en vragen of er bij zekere

---

[10]) Men kan het ook stellen zoals Vredenduin (zie voetnoot 2) doet: daar $\frac{d}{dx}$ een kwantor is, is de x in $\frac{d}{dx}x^2$ gebonden, en daarom kan $\frac{d}{dx}x^2$ niet gelijk zijn aan $2x$, waarin de x niet gebonden is.

reële x een getal a bestaat met de eigenschap dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is, zó dat

$$|f(x+h) - f(x) - a[g(x+h) - g(x)]| \leqq \varepsilon |h|$$

voor alle h die voldoen aan $|h| < \delta$. Nu is a (als hij bestaat)een maat voor de groei van f ten opzichte van de ijkfunctie g in de omgeving van x.

Om te laten zien dat a niet ondubbelzinnig bepaald hoeft te zijn, onderstellen we dat ook a' aan de gestelde eisen voldoet. Dan krijgt men door aftrekking van de betreffende ongelijkheden

$$|a - a'| \cdot |g(x+h) - g(x)| \leqq 2\varepsilon |h|.$$

Is nu $a - a' \neq 0$, dan kan dit geschreven worden als

$$|g(x+h) - g(x) - 0h| \leqq 2 |a - a'|^{-1} \varepsilon |h|,$$

wat inhoudt dat $g'(x) = 0$. Het is gemakkelijk te bewijzen dat, als $g'(x) = 0$ en er tenminste één a bestaat die aan de gestelde eisen voldoet, iedere reële a voldoet. Een voorbeeld is $f = g = \mathbf{x}^2$, $x = 0$.

Na deze uitweiding keren we terug naar het geval waar a wèl ondubbelzinnig bepaald is. We definiëren dan de functie $\frac{df}{dg}$ (*de afgeleide van f naar g*) door hem in het punt x de waarde $\frac{df}{dg}(x) = a$ toe te kennen. Deze afgeleide kan bestaan zonder dat de gebruikelijke afgeleiden $f'(x)$ en $g'(x)$ bestaan; in het geval dat $\frac{dg}{df}(x)$ en $\frac{df}{dg}(x)$ bestaan, is echter steeds $\frac{df}{d\mathbf{x}}(x) = \frac{df}{dg}(x)\,\frac{dg}{d\mathbf{x}}(x)$ zoals de lezer zelf wel kan verifiëren.

Algemener kunnen we functies van „twee veranderlijken" beschouwen. Dit zijn dus functies, die gedefinieerd zijn op een deelverzameling van $\mathbf{R}^2$. De elementen van $\mathbf{R}^2$ zijn paren reële getallen. We spreken nu eerst af, wat we verstaan onder de som van twee elementen van $\mathbf{R}^2$ en onder de modulus van een dergelijk element. De definities hiervan zijn:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2),$$
$$|(x, y)| = \sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

We beschouwen nu drie functies f, g_1 en g_2, gedefinieerd in $\mathbf{R}^2$ (of in een deel ervan) en vragen of er getallen a en b bestaan met de eigenschap dat bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat

$$|f(z+h)-f(z)-a[g_1(z+h)-g_1(z)]-b[g_2(z+h)-g_2(z)]| \leqq \varepsilon|h|$$

voor alle h die voldoen aan $|h| < \delta$ [11]). Hierin stellen z en h dus paren reële getallen voor; $f(z)$, $g_1(z)$ en $g_2(z)$ zijn reële getallen; het linker lid van de ongelijkheid is dus de modulus van een reëel getal; in het rechter lid daarentegen is $|h|$ de hierboven gedefinieerde modulus van een element van $\mathbf{R}^2$. Zijn a en b ondubbelzinnig bepaald door deze ongelijkheid, dan is het geoorloofd $a = \frac{\partial f}{\partial g_1}(z)$ en $b = \frac{\partial f}{\partial g_2}(z)$ te stellen.

Hierbij moet echter opgemerkt dat $\frac{\partial f}{\partial g_1}$ óók afhangt van de keuze van g_2, zodat een notatie als $\left(\frac{\partial f}{\partial g_1}\right)_{g_2}$ in gevallen van mogelijke verwarring te prefereren is. Immers, voert men G_1 en G_2 in met $G_1 = g_1$ maar $G_2 = g_1 + 2g_2$, dan is

$$a[g_1(z+h) - g_1(z)] + b[g_2(z+h) - g_2(z)] =$$

$$= (a - \tfrac{1}{2}b)[G_1(z+h) - G_1(z)] + \tfrac{1}{2}b[G_2(z+h) - G_2(z)],$$

zodat $\frac{\partial f}{\partial G_1}(z) = a - \frac{1}{2}b = \frac{\partial f}{\partial g_1}(z) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial g_2}(z)$.

Notaties als $\frac{\partial f}{\partial g_i}$ zijn niets vreemds voor hen die bekend zijn met de thermodynamica. Immers zoals bekend is de toestand van een gas in evenwicht volkomen bepaald door elke twee van de drie grootheden P (druk), V (volume) en T (absolute temperatuur). Dat wil dus zeggen dat ieder „punt" x van de verzameling X van alle (evenwichts-)toestanden van een gas volkomen bepaald is door de waarden die twee van de functies P, V en T aannemen in het punt x van hun definitiegebied X. Men kan dus naar believen bij voorbeeld P en T gebruiken om X af te beelden in de getallenruimte $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Onafhankelijk van de keuze van de afbeelding is het nu duidelijk dat bv. voor de energie ε de grootheden $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P}\right)_T$, $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_P$ zinvol zijn, maar ook $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P}\right)_V$, $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V}\right)_T$, enzovoorts. Deze grootheden zijn met elkaar verbonden via de afgeleiden $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$, $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$, enz.,

---

[11]) De hierboven staande ongelijkheid is die verbonden met het begrip totale differentiaal, zij het in ietwat gegeneraliseerde vorm.

die hun oorsprong hebben in de toestandsvergelijking (voor ideale gassen de wet van Boyle: $PV = RT$).

Deze illustratie was bedoeld om duidelijk te maken dat een afgeleide niets anders is dan een maat voor de groei van een functie ten opzichte van zekere ijkfuncties. Is zo'n ijkfunctie impliciet gegeven in de situatie, dan gaat dat aspect wel eens verloren. Ik wilde duidelijk maken dat $\mathbf{x}$ een goede vertrouwde ijkfunctie is, en dat er situaties zijn waar een keuze van ijkfuncties eens en voor al niet mogelijk, maar ook niet nodig is.

De gebruikelijke ijkfuncties op $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ zijn natuurlijk de projectiefuncties $\mathbf{x}_1$ en $\mathbf{x}_2$ die aan elk punt (getallenpaar) (x, y) de waarden $\mathbf{x}_1(x, y) = x$ resp. $\mathbf{x}_2(x, y) = y$ toevoegen. De gebruikelijke partiële afgeleiden van een functie f zijn precies de $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}$ en de $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_2}$ [12]).

§ 5. Voetangels en verrassingen

Iedere notatie heeft zijn sterke en zijn zwakke plekken. Dat geldt in het bijzonder voor het gebruik van Freudenthal's kwantor $\curlyvee$, en ook voor het gebruik van de identieke afbeelding $\mathbf{x}$ en de overeenkomstige projectiefuncties in hoger-dimensionale getallenruimten. We belichten nu enige van de beperkingen in de mogelijkheden in deze symbolieken.

Freudenthal's $\curlyvee$ is dus voornamelijk van belang als we een „expliciete uitdrukking in x" hebben, zoals een veelterm of een rationale functie (die we hier maar met $f(x)$ aanduiden), en deze als functie van x beschouwen. Dat wil zeggen, we willen de afbeelding $x \rightarrow f(x)$ hebben. Het symbool daarvoor is $\curlyvee_x f(x)$. Dus: de afbeelding $x \rightarrow x^2 + 7x$ wordt voorgesteld door $\curlyvee_x(x^2 + 7x)$. De afgeleide van deze afbeelding is dan $D\curlyvee_x(x^2 + 7x)$, en wordt als volgt berekend:

$$
\begin{aligned}
&(D\curlyvee_x(x^2 + 7x))(y) \\
&\qquad = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[(\curlyvee_x(x^2 + 7x))(y + h) - (\curlyvee_x(x^2 + 7x))(y)] \\
&\qquad = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[(y + h)^2 + 7(y + h) - y^2 - 7y],
\end{aligned}
$$

waarna de gebruikelijke algebra toegepast wordt. Voor y had ik ook x kunnen nemen, daar immer $\curlyvee_x(x^2 + 7x)$ niet meer van x

---

[12]) Het is in tamelijk pathologische gevallen mogelijk dat de partiële afgeleiden (in de zin van limiet van een differentiequotiënt) bestaan zonder dat f een totale differentiaal heeft. Dit artikel is niet de plaats hier nader op in te gaan.

afhangt (x is gebonden), maar voor de duidelijkheid heb ik dat maar niet gedaan.

Soortgelijk dubbel gebruik van x vindt men ook in notaties als $\int_a^x x^2 dx$ en $x \in \{x \mid x^2 = 2\}$, die volkomen toelaatbaar zijn, al zijn ze didactisch dan ook niet aan te bevelen.

Dit ietwat verwarrende dubbele gebruik van x is ook nuttig als methode om $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ te rechtvaardigen — dat dit voor middelbare school-leerlingen aan te bevelen is, kan ik echter niet zeggen! Hier gaan we dan: we definiëren $\frac{d}{dx}f(x)$ als $(Df)(x)$, oftewel, als

$$\frac{d}{dx}f(x) = (D\curlyvee_x f(x))(x),$$

dat op ietwat duidelijker wijze ook zó geschreven kan worden:

$$\frac{d}{dx}f(x) = (D\curlyvee_y f(y))(x),$$

maar dan is in zekere zin de grap er af.

Deze definitie van $\frac{d}{dx}$[13]) maakt nu duidelijk wat in de gebruikelijke behandeling alleen op de achtergrond staat, nl. dat x gedurende de diverse operaties een paar keer van betekenis verandert. Het kan geen kwaad als we ons afvragen of we een logisch zo gecompliceerde situatie zonder veel blikken of blozen aan onze leerlingen en studenten voor mogen zetten!

Een tweede mogelijkheid die Freudenthal's notatie schept, is het eenvoudig samenstellen van functies. Laat f, g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dan is $f \circ g$ een gebruikelijke notatie [14]) voor de samenstelling, die dus gedefinieerd is door $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Is bij voorbeeld $f(x) = x^2 + x$ en $g(x) = x^3 + 1$, dan is

$$[\curlyvee_x(x^2 + x)] \circ [\curlyvee_x(x^3 + 1)]$$

hetzelfde als $f \circ g$, dwz. de functie die aan x toevoegt het resultaat van de substitutie $t = x^3 + 1$ in $t^2 + t$.

---

[13]) In plaats van $\frac{d}{dx}$ kunnen we hier ook D_x gebruiken; een essentieel verschil is er niet.

[14]) Volgens het principe uitgesproken in voetnoot 6 mogen we $f(g)$ schrijven in plaats van $f \circ g$. In de analyse is zoiets ook wel gebruikelijk; in jongere gebieden van de wiskunde ziet men nog wel eens $g^*(f)$, $f_*(g)$ en dergelijke.

De situatie bij functies van „meer veranderlijken" heeft zowel intrigerende als verraderlijke aspecten. Het verschillend zijn (als functies, natuurlijk) van $\Upsilon_x\Upsilon_y f(x, y)$, $\Upsilon_y\Upsilon_x f(x, y)$ en $\Upsilon_{(x,y)} f(x, y)$ kan vanzelfsprekend leiden tot een hoop vervelende omslachtigheden. Heb je in een berekening de een gevonden, dan heb je in het daarop volgende natuurlijk juist de ander nodig! Ter illustratie van de verschillen neemt Freudenthal het geval dat $f(x, y)$ alleen zinvol is als $x \in A$ en $y \in B$, terwijl A en B disjunct zijn. Laat verder $a \in A$, dan heeft $(\Upsilon_x\Upsilon_y f(x, y))(a) = \Upsilon_y f(a, y)$ betekenis, maar $(\Upsilon_y\Upsilon_x f(x, y))(a)$ zou gelijk aan $\Upsilon_x f(x, a)$ moeten zijn, wat niet gedefinieerd is. Evenzo is $(\Upsilon_{(x,y)} f(x, y))(c)$ alleen zinvol als c een element is van het Cartesisch produkt $A \times B$, zodat $c = (a, b)$ voor zekere $a \in A$ en $b \in B$; en dan is natuurlijk $(\Upsilon_{(x,y)} f(x, y))(c) = f(a, b)$.

Interessant is overigens het verschil tussen $D\Upsilon_x\Upsilon_y f(x, y)$ en $\Upsilon_y D\Upsilon_x f(x, y)$. Het eerste is de afgeleide van de afbeelding $x \to \Upsilon_y(x, y)$ die dus aan iedere x een element van een functieruimte toevoegt. Het tweede is de „gewone partiële afgeleide", dus de afgeleide van $x \to f(x, y)$, opgevat als functie van x en y.

Dat de Υ-notatie verrassingen heeft, is nu wel duidelijk. Ik vermeld als afsluiting dat er zich onder de functies

$$\begin{array}{lll} (\Upsilon_x x)(\Upsilon_x x), & (\Upsilon_x x)(\Upsilon_y y), & (\Upsilon_{(x,y)} x)(\Upsilon_{(x,y)} y), \\ \Upsilon_{(x,y)} xy, & \Upsilon_x x^2, & \Upsilon_{(y,x)} x, \\ \Upsilon_{(x,y)} y, & \Upsilon_x(x\Upsilon_y y), & \Upsilon_y\Upsilon_x xy \end{array}$$

enige groepjes van gelijken bevinden; welke dat zijn laat ik als opgave aan de lezer over.

Nu de **x**-notatie, die in enige vormen reeds zeer gebruikelijk is in moderne literatuur over functies van „meer variabelen", met name de differentiaalmeetkunde. Ook hier zijn een aantal verrassingen aanwezig. Neem bij voorbeeld het geval van een afbeelding $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, die veelal met de naam (vlakke) *kromme, curve, trajectorie,* enz. betiteld wordt. Het is gebruikelijk, deze kromme te beschrijven door $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, waarbij dan x en y ter explicatie coördinaten in $\mathbf{R}^2$ genoemd worden. Verleidelijk eenvoudig als dit klinken moge, begrijp ik het eigenlijk niet. Wàt zijn x en y? Misschien willekeurige reële getallen, daar ze immers coördinaten in $\mathbf{R}^2$ zijn, en dus alle mogelijke waarden aan moeten kunnen nemen. En t moet evenzo wel een willekeurig element van $\mathbf{R}$ zijn. Maar dan zou ik eerder geneigd zijn, $x \neq f_1(t)$ en $y \neq f_2(t)$ te zetten, met een heel wat kleinere kans ongelijk te hebben!

Wat ik duidelijk probeer te maken, is dat er hier geen sprake is

van een „gelijkheid" $x = f_1(t)$. Wèl geeft men het getal $f_1(t)$ een nieuwe naam, nl. x, hoewel in feite x al de naam was van iets anders! Toch staan de leerboeken hier vol mee, en de terminologie is dan ook zozeer aangepast aan deze onzin, dat het praktisch onmogelijk is geworden haar uit te roeien.

Laten we de situatie nòg eens bekijken, maar *nu* **t** (ander lettertype) beschouwen als de identieke afbeelding op **R**, dus $\mathbf{t} = \curlyvee_x x$, of als U dat liever ziet: $\mathbf{t} = \curlyvee_t t$. We beschouwen verder **x** en **y** als projecties in $\mathbf{R}^2$, dus $\mathbf{x} = \curlyvee_{(x,y)} x$, en $\mathbf{y} = \curlyvee_{(x,y)} y$. De afbeelding f voegt aan ieder reëel getal t toe een punt van $\mathbf{R}^2$, dus een geordend paar reële getallen. Dat zou ik natuurlijk (x, y) kunnen noemen, maar is het niet veel duidelijker, gewoon $(f_1(t), f_2(t))$ te gebruiken? Dan begaan we zeker niet de fout van nodeloos her-benoemen [15]). En wat zijn $f_1(t)$ en $f_2(t)$ nu precies? Voor iedere reële t is $f_1(t)$ de eerste coördinaat van het punt $f(t)$, en $f_2(t)$ de tweede coördinaat. Dus $f_1(t) = \mathbf{x}(f(t))$, en $f_2(t) = \mathbf{y}(f(t))$, dat wil zeggen,

$$f_1 = \mathbf{x} \circ f, \quad f_2 = \mathbf{y} \circ f.$$

In plaats van over „de kromme $x = t^2$, $y = t^3$" te praten, moeten we het dus hebben over de kromme (of afbeelding) f, waar

$$\mathbf{x} \circ f = t^2, \quad \mathbf{y} \circ f = t^3,$$

oftewel: de kromme f, waar $f(t) = (t^2, t^3)$ voor iedere recle t. Nòg anders: de kromme $\curlyvee_t(t^2, t^3)$, of de kromme $(\mathbf{t}^2, \mathbf{t}^3)$ [16]).

De raakvector-functie van een kromme kan nu aangeduid worden

$$\text{met } \frac{df}{dt}, \; f', \; \left(\frac{d}{d\mathbf{t}}\mathbf{x} \circ f, \; \frac{d}{d\mathbf{t}}\mathbf{y} \circ f\right), \text{ enzovoorts.}$$

Er is geen behoefte aan de traditionele $\dfrac{dx}{dt} = f_1'(t)$, $\dfrac{dy}{dt} = f_2'(t)$. Tenslotte zijn x en y geen functies gedefinieerd op **R**; hoe kan men ze dan differentiëren alsof ze het wèl waren?

Onder de nadelen van de **x**-notatie wil ik noemen de situatie van de functie $a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{y}^2 + c\mathbf{xy}$, gedefinieerd op $\mathbf{R}^2$, waar later ook a, b en c gevarieerd moeten worden. Dan heeft men ineens een functie gedefinieerd op $\mathbf{R}^5$, zodat **x** en **y** geen betekenis meer

---

[15]) De absurditeit van het herhaald benoemen van een object wordt geïllustreerd door de volgende speelsheid: Laat P een punt Q zijn. Noem het R.

[16]) We hebben hier het principe van voetnoot 6 toegepast op de operatie van paar-vorming.

hebben. Te ontwijken zijn deze en soortgelijke problemen wèl, maar een zekere voorzichtigheid is daarvoor nog wel eens nodig.

Department of Mathematics
University of Pennsylvania
Philadelphia, U.S.A.

KORREL CXXIII

(een slechte notatie)

Bij het oplossen van algebravraagstukken geven we vaak oplossingen, die gebrekkig zijn door het ontbreken van de noodzakelijke verbindende tekst of door het ontbreken van een goede notatie. Het volgende voorbeeld is hiervoor wel zeer karakteristiek.

Opgave. Welke waarden kan de functie ${}^2\log(-x^2 + 4x)$ aannemen?

Om misverstand te voorkomen, wil ik beginnen op te merken, dat de volgende oplossingswijze ontleend is aan de schriften van mijn leerlingen. Het is dus niet de bedoeling kritiek op collega's uit te oefenen.

Oplossing.

$$-x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4 \leqq 4,$$

dus

$${}^2\log(-x^2 + 4x) \leqq 2.$$

Laat ik beginnen op te merken, dat met

$$-x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$$

uiteraard bedoeld is, dat deze gelijkheid voor elke waarde van x juist is. Eigenlijk zouden we dus moeten schrijven

$$\forall x\,\{-x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4\}.$$

Gelukkig doen we dit niet. Het is voor ons vaak vanzelfsprekend, dat als in een formule een letter voorkomt, bedoeld wordt, dat deze formule voor elke waarde van die letter juist is.

Gewapend met deze praktische conventie zou men nu denken, dat de regel

$${}^2\log(-x^2 + 4x) \leqq 2$$

betekent, dat deze ongelijkheid voor elke waarde van x juist is. Helaas klopt dit niet. Voor b.v. $x = -1$ is de ongelijkheid niet juist.

Wel zou juist zijn de bewering: voor elke waarde van x, waarvoor ${}^2\log(-x^2+4x)$ betekenis heeft, geldt

$$ {}^2\log(-x^2+4x) \leqq 2. $$

Met enige schrik zal men nu echter opmerken, dat voor elke dergelijke x ook

$$ {}^2\log(-x^2+4x) \leqq 3 $$

juist is. En toch geeft deze bewering niet weer, wat men als antwoord op de gestelde vraag verlangt.

Wat bedoelt men nu eigenlijk, als men als antwoord opgeeft:

$$ {}^2\log(-x^2+4x) \leqq 2? $$

Men bedoelt dat voor elke y geldt

$$ y \leqq 2 \rightarrow \text{er is een } x, \text{ waarvoor } {}^2\log(-x^2+4x) = y, $$

en omgekeerd. Of, in symbolentaal,

$$ \forall y \{y \leqq 2 \rightleftarrows \exists x \; {}^2\log(-x^2+4x) = y\}. $$

Het behoeft geen betoog, dat zowel de verbindende tekst als de symbolische weergave te moeilijk is voor onze leerlingen. We geven echter de moed niet op en trachten een methode te vinden, die juist en vóór de leerlingen begrijpelijk is. We merken daartoe op, dat gevraagd wordt naar de verzameling van waarden, die de functie ${}^2\log(-x^2+4x)$ aanneemt en dat met het antwoord bedoeld wordt, dat deze verzameling dezelfde is als de verzameling van de getallen, die $\leqq 2$ zijn. De oplossing wordt nu

$$ \{y \mid y = -x^2+4x\} = \{y \mid y \leqq 4\},^{1)} $$

dus

$$ \{y \mid y = {}^2\log(-x^2+4x)\} = \{y \mid y \leqq 2\}. $$

(Helemaal correct is dit eerst, als men in beide regels voor de tweede y nog $\exists x$ inlast. Deze zwaarwichtigheid lijkt mij didactisch niet verantwoord.)

Uit het voorgaande blijkt, dat we behoefte hebben aan de notatie voor een verzameling om ons begrijpelijk en toch juist te kunnen uitdrukken.

P. G. J. Vredenduin

1) Een andere mogelijkheid is het linker lid te schrijven $\{-x^2+4x \mid x \in R\}$, waarin R de verzameling van de reële getallen voorstelt.

OVER DRIEHOEKEN EN VIERHOEKEN MET AANGESCHREVEN VIERKANTEN

door

Prof. Dr. L. KUIPERS

Delft

In de december-aflevering (IV) van de 39e jaargang (1963—'64) van Euclides komt een behandeling voor van het volgende vraagstuk:

ABCD is een willekeurige vierhoek. Op elke zijde zet men buitenwaarts een vierkant dat die zijde als zijde heeft. Welke bijzonderheden vertoont de vierhoek gevormd door de middelpunten *P*, *Q*, *R* en *S* der vierkanten?

Het blijkt dan dat de diagonalen *PR* en *QS* van vierhoek *PQRS* aan elkaar gelijk zijn en loodrecht op elkaar staan. Indien vierhoek *ABCD* een parallellogram is, is vierhoek *PQRS* een vierkant. Dr. J. T. Groenman, de auteur van het bovenvermelde Euclides-artikel: „Over vierhoeken met aangeschreven vierkanten", deelt aan het begin hiervan mee dat hij het laatstgenoemde bijzondere geval als vraagstuk aantrof in Praxis der Mathematik, 5, jan. 1963 (p. 17). Een tweede bijzonder geval, dat men vindt door de hierboven genoemde eigenschap van een willekeurige vierhoek toe te passen op een driehoek, trof ik aan in „Unvergängliche Geometrie" (Duitse vertaling, Birkhäuser Verlag, 1963) van H. S. M. Coxeter. Het algemene probleem vindt men daar als opgave 10 op pag. 40, terwijl het bijzondere geval (opgave 9) wordt toegeschreven aan W. A. J. Luxemburg.

Allereerst zou ik er op willen wijzen dat het eerstgenoemde algemene vraagstuk al oud is. Men kan gerust aannemen dat het in de vraagstukkenrubriek van menig wiskundetijdschrift heeft geparadeerd. De leeftijd doet echter géén afbreuk aan de elegantie van het probleem. De ervaring leert dat het de aandacht blijft trekken.

De fraaie eigenschappen van de bovengenoemde vierhoek *PQRS* kan men op uiteenlopende wijzen aantonen. Een voor de hand liggende manier is gebruik te maken van de stellingen der elementaire vlakke meetkunde; men zie het bewijs op pag. 122 dat dr. Groenman in zijn artikel meedeelt. Men kan ook analytisch te

werk gaan. Dr. Groenman hanteert deze methode om het algemene geval te bewijzen en enige bijzondere gevallen op te sporen.

Ik vermeld hier, maar dit is overbekend, dat de theorie der complexe getallen een bijzonder doeltreffend hulpmiddel is om bovengenoemde eigenschappen aan te tonen. Zijn de hoekpunten A, B, C en D van vierhoek $ABCD$ de beeldpunten van de complexe getallen z_1, z_2, z_3 en z_4 resp., dan is de vector $\overrightarrow{RP}$ de afbeelding van het complexe getal $\frac{1}{2}(z_1 + z_2 - z_3 - z_4) + \frac{1}{2}(z_1 - z_2 - z_3 + z_4)i$. Door cyclische verwisseling vindt men onmiddellijk de overeenkomstige uitdrukking afgebeeld door de vector $\overrightarrow{SQ}$. Men is dan slechts één stap van de complete oplossing verwijderd (vermenigvuldigen met i). Zie o.a. Middelalgebra van Wijdenes, deel I, 5de druk, p. 168, vrgst. 13.

Een oplossing kan ook worden verkregen door de wetten van de mechanica toe te passen. Zie fig. 1. $ABCD$ is de gegeven vierhoek.

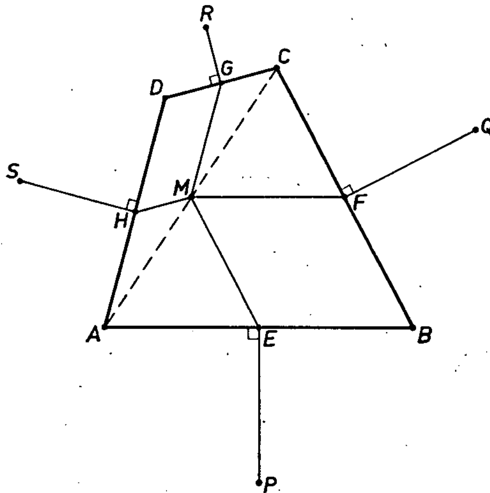


Fig. 1.

P, Q, R en S zijn de middelpunten der aangeschreven vierkanten. M is het midden van de diagonaal AC. We redeneren nu als volgt. Beschouw vier krachten met eenzelfde aangrijpingspunt en waarvan de grootte en richting opv. wordt bepaald door $\overrightarrow{RG}$, $\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{ME}$ en $\overrightarrow{EP}$. De resultante van deze krachten wordt in grootte en richting bepaald door $\overrightarrow{RP}$. Zo bepaalt de vector $\overrightarrow{SQ}$ in grootte en richting de resultante van vier krachten, werkend op eenzelfde stoffelijke

punt, waarvan de grootte en richting opv. wordt voorgesteld door $\overrightarrow{SH}$, $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{MF}$ en $\overrightarrow{FQ}$. Nu is $RG = HM$ en $RG \perp HM$, etc. De krachten van het ene viertal zijn even groot als die van het andere viertal, terwijl krachten van gelijke grootte loodrecht op elkaar staan. De viertallen zijn evenwel in verschillende volgorde uitgezet(!). Dit laatste heeft echter géén invloed op de grootte of richting van de resultante. De resulterende krachten van beide viertallen zijn even groot en staan loodrecht op elkaar, zodat $RP = SQ$ en $RP \perp SQ$.

Fig. 2.

Het bovenstaande geeft me aanleiding om terug te komen op een vraagstuk dat ter oplossing aangeboden werd onder nr 31 in deel XIX van de Wiskundige opgaven van het Wiskundig Genootschap, en dat als volgt luidde:

Op de zijden van een driehoek worden buitenwaarts vierkanten beschreven. De hoekpunten van de vierkanten die niet samenvallen met die van de driehoek, vormen een zeshoek. Gevraagd wordt te bewijzen dat de lijnen die de middens van tegenover elkaar liggende zijden van deze zeshoek verbinden, elkaar in één punt snijden.

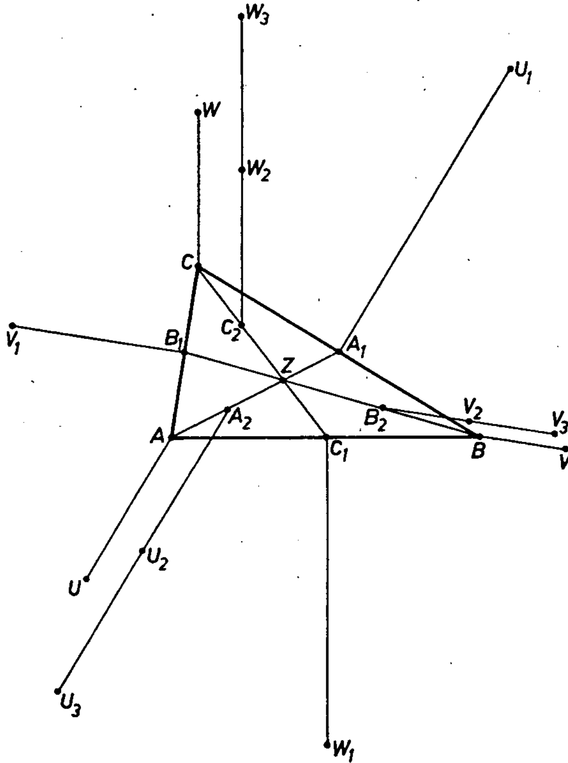


Fig. 3.

Destijds verschenen in de door het W.G. gepubliceerde Oplossingen twee bewijzen, het ene m.b.v. analytische meetkunde, het andere door middel van de eigenschappen der complexe getallen. Zelf had ik toen geen andere oplossing gevonden.

Onlangs deed Prof. dr. S. C. van Veen (Delft) mij de volgende planimetrische oplossing van dit probleem aan de hand (zelfs in een gegeneraliseerde vorm: de vierkanten kunnen nl. vervangen worden door gelijkvormige rechthoeken). Deze oplossing komt op het volgende neer. Zie fig. 2.

De hoogtelijn CD snijdt RQ in P. Trek de hulplijn $TCS // AB$; waarbij S en T de snijpunten zijn met de rechten door Q en $R // CD$. Dan is $\triangle TCR \cong \triangle DCA$ en $\triangle SCQ \cong \triangle DCB$, zodat $TC = CS =$

$= CD$. Hieruit volgt dat P het midden is van RQ. Tevens blijkt op eenvoudige wijze dat $PC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$. De lijn PN (N is het midden van UV) snijdt de zwaartelijn CM in een punt Y, zó dat $CY = \frac{1}{3}CM$. Verleng nu MN met een lijnstuk $NW = \frac{1}{2}c$. Dan is $CW \mathrel{\#} PN$. De rechte CW en de overeenkomstige rechten door A en B gaan door één punt; immers $\triangle ABW$ is gelijkvormig met de op overeenkomstige wijze geconstrueerde driehoeken beschreven op de zijden BC en CA, en volgens een bekende stelling gaan de drie rechten CW, enz. door één punt. Nu wordt de rechte lijn waarop het lijnstuk PN ligt verkregen door CW t.o.v. het zwaartepunt Z met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen. Derhalve gaan de drie rechten PN, etc. eveneens door één punt.

Het is Dr. G. W. Decnop (Delft) gelukt een bewijs te geven van een andere generalisatie van het gestelde probleem door gebruik te maken van de eigenschappen van projectieve puntenreeksen.

Ten slotte geven we een bewijs dat berust op de wetten van de statica. Zie fig. 3. Beschouw $\triangle ABC$. De zwaartelijnen zijn AA_1, BB_1 en CC_1, het zwaartepunt is Z. Teken de segmenten $CW = \frac{1}{2}AB$ en $\perp AB$ (d.i. het segment CP van fig. 2) en eveneens $C_1W_1 = AB$ en $\perp AB$ (d.i. het segment MN van fig. 2). Teken ook de overeenkomstige segmenten AU, A_1U_1, BV en B_1V_1. We willen aantonen dat UU_1, VV_1 en WW_1 door één punt gaan. UU_1 gaat door A_2, het midden van AZ; VV_1 door B_2, het midden van BZ, etc. Gerichte lijnsegmenten, geschikt gekozen, interpreteren we nu als krachten. Men ziet: de krachten $\overrightarrow{AU}$, $\overrightarrow{BV}$ en $\overrightarrow{CW}$ zijn in evenwicht, evenals de krachten $\overrightarrow{U_1A_1}$, $\overrightarrow{V_1B_1}$ en $\overrightarrow{W_1C_1}$. Hetzelfde geldt van de krachten $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{B_1B}$ en $\overrightarrow{C_1C}$. Het stelsel gevormd door deze negen krachten is in evenwicht. De richting en grootte van de resultante van de krachten $\overrightarrow{W_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1C}$ en $\overrightarrow{CW}$ worden bepaald door $\overrightarrow{W_1W}$, de resultante zelf gaat door Z. Om nu toch $\overrightarrow{W_1W}$ als resultante van drie krachten resp. $\mathrel{\#}$ $\overrightarrow{CW}$, $\overrightarrow{C_1C}$ en $\overrightarrow{W_1C_1}$, te doen fungeren, gaan wij als volgt te werk. De kracht $\overrightarrow{CW}$ wordt // zichzelf verplaatst tot het aangrijpingspunt in C_2 valt, enz. Zo ontstaan de drie krachten $\overrightarrow{A_2U_2}$, $\overrightarrow{B_2V_2}$ en $\overrightarrow{C_2W_2}$. Deze maken evenwicht met elkaar (!). Vervolgens verplaatsen we ook de krachten $\overrightarrow{U_1A_1}$, $\overrightarrow{V_1B_1}$ en $\overrightarrow{W_1C_1}$ // zichzelf tot de aangrijpingspunten opv. in A_2, B_2 en C_2 terechtkomen. Ook de drie krachten $\overrightarrow{A_2U_3}$, $\overrightarrow{B_2V_3}$ en $\overrightarrow{C_2W_3}$ zijn in evenwicht. De krachten $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{B_1B}$ en $\overrightarrow{C_1C}$ laten we onveranderd.

Opnieuw zijn er negen krachten die in evenwicht zijn. De resultante van $\overrightarrow{A_2U_2}$, $\overrightarrow{A_2U_3}$ en $\overrightarrow{A_1A}$ gaat door A_2 en is in richting en grootte bepaald door $\overrightarrow{U_1U}$. De resultante van $\overrightarrow{B_2V_2}$, $\overrightarrow{B_2V_3}$ en $\overrightarrow{B_1B}$ gaat door B_2 en is in richting en grootte bepaald door $\overrightarrow{V_1V}$, enz. Daar de drie resulterende krachten $\overrightarrow{U_1U}$, $\overrightarrow{V_1V}$ en $\overrightarrow{W_1W}$ in evenwicht zijn, gaan de werklijnen door één punt.

LA MODERNISATION DES MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN FRANCE

A. Huisman
Inspecteur de l'Académie de Paris.

Vers 1950, à la suite de profondes modifications dans les études mathématiques universitaires, le bruit se répandit en France que la mathématique était en proie à une révolution, et qu'il devenait très difficile, sinon impossible, à un élève sortant du Lycée, d'entreprendre des études mathématiques à la Faculté.

Cette prise de conscience n'était d'ailleurs pas particulière à notre pays; concrètement, elle se traduisit par le stage organisé à Royaumont par l'OCDE en 1959, suivi de la session d'études de Yougoslavie l'année suivante.

Toutes ces réflexions se traduisirent dès 1961 par des modifications dans les programmes de mathématiques du second cycle des lycées (c'est à dire les trois dernières années de Seconde, Première et Mathématiques élémentaires, de 15 à 17 ans environ). On peut caractériser ces modifications en disant qu'elles entrainaient une diminution de l'importance relative de la géométrie pure au profit de notions de géométrie analytique, une structure plus claire de la géométrie (géométrie affine en Seconde, métrique en Première, transformations et coniques en Mathématiques élémentaires), et l'apparition prudente de notions d'algèbre „moderne", notions qui sont admises, suggérées mais non imposées; c'est ce que précisent les commentaires officiels qui accompagnaient les nouveaux programmes de Seconde:

„Le libellé du programme ne fait pas explicitement mention de certaines notions simples sur les ensembles, ni du vocabulaire actuellement admis pour les désigner: réunion, intersection, en-

sembles complémentaires, inclusion, appartenance... Il n'est nullement question d'en proscrire l'emploi; les unes et les autres se rencontrent en fait très fréquemment dans la plupart des théories; il convient de les dégager peu à peu, de les faire reconnaître, puis de les définir, à partir de nombreux exemples où elles interviennent naturellement. Ainsi apparaîtra leur intérêt par les applications qu'on peut en faire, par la simplification ou la clarification qu'elles sont susceptibles d'apporter dans une recherche ou dans un exposé.

D'autres notions, telles que celles qui touchent aux structures d'ensembles: groupes, anneaux, corps, pourront aussi être introduites, à condition que le terrain ait été d'abord soigneusement préparé; elles peuvent faciliter la présentation de certaines synthèses et permettre des comparaisons utiles pour l'avenir.

D'ailleurs, le vocabulaire mathématique est en train de s'enrichir considérablement; beaucoup de mots, parfois imagés, parfois techniques, voient le jour, tantôt pour se substituer, en les abrégeant, à des locutions anciennes, tantôt pour exprimer une idée nouvelle ou mettre en évidence des nuances de pensée. Quelques-uns paraissent avoir acquis de façon assez unanime, droit de cité; d'autres sont encore contestés et subissent des fluctuations. Il peut être tentant, ne serait-ce qu'à titre d'essai, et pour les mettre à l'épreuve, d'en employer certains dans les classes secondaires; mais une précaution évidente s'impose alors, vis à vis des élèves; c'est de les informer clairement et de les rendre capables, en toute occasion, d'expliquer complètement en langage ordinaire, les termes employés par eux et que n'a pas encore consacrés une longue tradition.

Le symbolisme mathématique, ses développements, les innovations qui le concernent, posent, pour l'enseignement secondaire, un problème analogue. Pendant les années d'initiation, les représentations symboliques d'êtres et de relations constituent essentiellement un mode abrégé de traduction d'une idée déjà exprimée ou que l'on est en mesure d'exprimer. Il paraît prudent de ne proposer aux débutants (en dehors des signes élémentaires qu'ils connaissent déjà et qu'ils ont appris à manier) qu'un nombre raisonnable de symboles nouveaux, liés à la présentation de certaines notions susceptibles d'être correctement assimilées; on peut citer, par exemple, et sans vouloir établir ainsi une liste limitative: quelques signes relatifs aux ensembles (réunion, intersection, inclusion, appartenance); ainsi que les „flèches" marquant une déduction ou une équivalence logique.

Cependant, qu'il s'agisse du vocabulaire ou des symboles, il faut toujours prendre garde au double danger du verbalisme et du

formalisme, aux méfaits que l'un et l'autre peuvent commettre; les mots et les signes et, particulièrement, ceux qui ont, pour le néophyte, l'attrait de la nouveauté ou du pittoresque, risquent souvent de masquer la pensée."

Cette attitude prudente est amplement justifiée par les remarques suivantes:

a) les professeurs en exercice ont été formés, dans leur grande majorité, avec les anciennes mathématiques, et n'ont pas toujours chérché à se tenir au courant de l'évolution des idées; on ne peut donc leur imposer une reconversion brutale;

b) les manuels scolaires s'inspirant des idées modernes n'existent pas;

c) l'importance (que certains jugent excessive) du rôle joué en France par les examens et les concours, et notamment par le baccalauréat, oblige à un prudent conservatisme, si l'on veut maintenir des chances égales pour tous les candidats.

Qu'a-t-on fait, depuis 1961, pour éviter ces trois écueils?

Disons tout de suite, en ce qui concerne le dernier, qu'il n'y a pas de changement notable en vue. Rien ne permet de penser que, dans un avenir proche, les examens et les concours verront leur rôle diminué en France. Notons d'ailleurs qu'il s'agit surtout du baccalauréat; dans les classes de mathématiques supérieures et de mathématiques spéciales (qui existent dans de nombreux lycées pour la préparation aux grandes écoles), les remous provoqués par l'évolution des mathématiques sont maintenant amortis, et les idées modernes s'y épanouissent librement.

En ce qui concerne le second point (les manuels), un effort réel a été fait durant ces dernières années; il a donné des résultats très inégaux. Certains auteurs se sont contentés d'ajouter hâtivement à leurs anciens ouvrages un chapitre sur les ensembles et les structures algébriques. Ces notions n'apparaissent guère dans la suite du texte (sauf parfois une débauche de quantificateurs dont l'utilité n'est pas évidente), ce qui n'est pas fait pour persuader l'élève de l'utilité de ces notions pour la compréhension des mathématiques.

D'autres au contraire ont opté résolument pour un mode d'exposition moderne, mais se sont souvent contentés d'adopter des exposés en usage à un niveau supérieur (par exemple les coupures de Dedekind ou les suites de Cauchy pour la construction du corps des nombres réels) et qui n'étaient guère adaptés aux possibilités d'élèves encore peu familiarisés avec de telles abstractions.

Enfin, en ce qui concerne l'information des professeurs, il faut reconnaître que l'initiative officielle a été jusqu'ici assez modeste,

bien que le problème du „recyclage" des professeurs et des ingénieurs soit à l'ordre du jour et souvent débattu, même dans la grande presse d'information. Depuis octobre 1963 seulement, il existe une émission hebdomadaire de télévision, intitulée „Les chantiers mathématiques"; elle est consacrée aux mathématiques modernes et destinée aux professeurs.

Est-ce à dire que rien n'a été fait? Tant s'en faut. On doit à l'Association des Professeurs de mathématiques de nombreuses initiatives dont l'efficacité n'est pas douteuse, notamment des conférences faites régulièrement depuis trois ans par M. Revuz, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers et ancien président de l'association; la première année a été consacrée aux structures algébriques, la seconde à l'algèbre linéaire, la troisième à la topologie. Ces conférences ont été ensuite rassemblées en volumes dont deux sont parus, et qui ont connu un vif succès, preuve qu'ils répondaient à un besoin insatisfait.

Toujours sous l'égide de l'Association des Professeurs de mathématiques, et sans parler des nombreux articles que publie le Bulletin de l'Association, il y a, dans maintes grandes villes de province, des conférences d'initiation qui sont régulièrement fréquentées par professeurs et instituteurs et suivies de débats animés.

Evidemment, cette activité de franc-tireur a l'inconvénient de ne pas atteindre la totalité du personnel en exercice. Mais enfin, elle crée un peu partout des centres de diffusion, à partir desquels des apôtres convaincus propagent inlassablement leur foi, jusque dans l'enseignement primaire élémentaire.

En définitive, on peut dire que la modernisation des mathématiques est en voie d'être réalisée et stabilisée dans les trois classes du second cycle des Lycées. La question qui se pose maintenant est de l'étendre aux quatre classes du premier cycle (Sixième, Cinquième, Quatrième, Troisième, de 11 à 14 ans environ).

Un essai en ce sens est tenté depuis plusieurs années par des Professeurs de l'Académie de Lille, dans une émission hebdomadaire de télévision intitulée „Télémaths". D'autre part, bien des professeurs font des tentatives analogues, indépendamment les uns des autres, dans leurs propres classes.

De telles initiatives sont discutées; tout d'abord, on peut leur reprocher parfois une trop grande audace, un oubli de la saine pédagogie sur laquelle insistent les Instructions officielles, comme nous l'avons vu plus haut. Ici encore, le manque de manuels se fait sentir.

De plus, leur caractère en quelque sorte anarchique leur enlève

une grande partie de leur efficacité et risque de discréditer tout essai de réforme au niveau élémentaire. Dans un même lycée, il y a des anciens et des modernes; de sorte que les élèves, d'une année à l'autre, ne conservant pas le même professeur, sont tiraillés entre deux enseignements qui se concilient mal. C'est pourquoi certains souhaitent des établissements témoins homogènes, comme il en existe ailleurs, bien que cette conception heurte les traditions égalitaires et centralisatrices françaises.

De ce rapide tour d'horizon, il ne faudrait pas tirer un jugement trop pessimiste de la modernisation des mathématiques dans l'enseignement secondaire français. Toute cette action, un peu en marge des autorités, ne leur échappe cependant pas; elles les encouragent ou les tempèrent s'il y a lieu, et il ne faudrait pas conclure au désordre. Ou du moins, si désordre il y a, c'est celui qui règne sur un chantier de construction, jusqu'à ce qu'il en sorte enfin un édifice neuf et pourvu des raffinements de la technique moderne.

En définitive, cette action en ordre dispersé a obtenu des résultats; elle est parvenue à un changement de climat, à une évolution des esprits; les oppositions se font moins vives, les réticences s'estompent. Sous l'apparente rigidité de la centralisation, il y a chez nous une certaine liberté du professeur, que ne manquent jamais de rappeler les Instructions ministérielles en toute occasion. C'est cette liberté que respectent les champions de la réforme; ils veulent convaincre et non contraindre.

Comme le rappelait la première émission des „Chantiers mathématiques", nous nous persuadons que la nécessaire réforme de l'enseignement des mathématiques sera l'œuvre de ceux qui l'enseignent, ou ne sera pas; ce doit être une création vivante et diverse comme la mathématique elle-même.

BOEKBESPREKING

R. Troelstra, Drs. A. N. Habermann, A. F. de Groot, Ir. F. Bulens. *Transformatiemeetkunde* 2, J. B. Wolters, Groningen, 1963, ing. *f* 2,90; geb. *f* 3,50.

Zoals als bekend mag worden aangenomen, wordt in deze leergang de meetkunde opgebouwd met behulp van transformaties. Zij, die deel 1 kennen, zullen dus een min of meer revolutionair boek verwachten, in elk geval boeiend, misschien ook irriterend. Het boeiende is er nog wel, maar stoelt niet meer op het element der verrassing; het irriterende ontbreekt vrijwel geheel. Het boek is braaf geworden, wat zijn bruikbaarheid mogelijk verhoogt, maar zijn boeiend karakter wat vermindert. De volgorde mist het onthutsende van die uit deel 1. Van de transformaties vindt men nog wel wat; dat moest wel, want de vermenigvuldiging moest nog komen. Die komt er wel prettig uit met behulp van middenparallellen in driehoek en trapezium. Na de vermenigvuldiging komen verhoudingen, evenredigheden, gelijkvormigheid. Bij het bewijs van de „bissectricestelling" komt een transformatie

— de spiegeling — essentieel aan de orde en laat een elegant bewijs zien. Bij de behandeling van de oppervlakten komt als nieuwe transformatie de afschuiving te voorschijn, die inderdaad goede diensten bewijst, maar toch wat de indruk maakt er om der wille van de transformaties te zijn bijgesleept. Het boek moet zijn naam waar maken!

Goniometrie en berekeningen van lijnstukken — zonder verrassingen — sluiten de rij.

Gezien het minder opzienbarends van dit deel, vergeleken met deel 1 en de mogelijk wat conservatieve instelling van hem, die dit boek mag introduceren bij de lezers van Euclides, mocht een bescheiden gevoel van opluchting bij mij worden verwacht. Merkwaardig genoeg ontbreekt dat gevoel. Dat is in zekere zin de verdienste van de auteurs; deel 1 had mij, ondanks mijn vragen — Euclides 39e jaargang II — zeer nieuwsgierig naar deel 2 gemaakt. Ik had gehoopt mij fijn te kunnen opwinden, maar kom nu niet aan mijn trekken. Niet de auteurs hebben hieraan schuld, maar de stof. De opbouw der meetkunde is eigenlijk na de vermenigvuldiging klaar; er is gezaaid. Nu moet de oogst komen en die kan niet anders brengen dan de gebruikelijke vruchten. Het zou mij niet verbazen, als deel 3 deze vermindering aan opzienbarende nieuwigheid nog meer zou demonstreren. Ik wacht met spanning.

Van elke paragraaf maakte ik enkele der laatste vraagstukken; zij waren ter zake en niet moeilijk. Enkele vond ik aardig en oorspronkelijk (§ 18 nr. 14). De stof geeft aanleiding tot veel berekeningen en minder bewijzen.

Deel 2 heeft dezelfde verantwoorde heldere stijl als deel 1; de eenvoudige taal constateerde ik opnieuw met genoegen. Daarbij komt de enorme verdienste, dat het boek kort is (72 pagina's, waarvan 64 werkelijke tekst en dan nog nog wel gedrukt). Men komt er door in één jaar zonder zich geweld aan te doen. „Kort" betekent bovendien „niet duur".

De theorie is aan verstandige beperkingen gebonden; de figuren zijn voortreffelijk. De uitgave is, zoals dat verwacht kan worden. Alleen het buitenblad vind ik lelijk; een bonte 8-hoek, die twee maal voorkomt en kennelijk onderworpen is geweest aan een translatie na een draaiïng. Die transformaties toch!

Met interesse kan de wiskundige onderwijswereld met mij uitzien naar deel 3.

Groenman

Bens, Bosteels, Bouqué, De Roover, Dewilde, Smissaert, Snauwaert, *Opbouw Nieuwe Schoolwiskunde I*, Ad. Wesmael-Charlier, Namen, 1964, 293 blz.

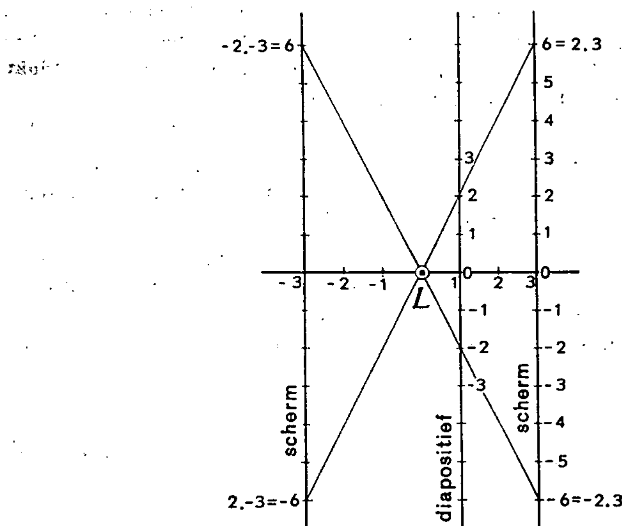
Sinds september 1963 is het in België mogelijk voor die leraren, die dat wensen in de aanvangsklasse van het middelbaar onderwijs wiskunde te geven volgens een modern programma. In Euclides **38**, p. 82—90 vindt men een verslag van een voordracht door collega Bouqué te Arlon gehouden, waarin hij een uiteenzetting gaf van de inhoud van dit nieuwe facultatieve leerplan.

Het boek van Bens c.s. beoogt de wiskunde te geven volgens dit nieuwe programma. Het is in 6 delen verdeeld. In deel 1 (48 blz.) worden de verzamelingen behandeld en de overige hoofdstukken uit de logica, die voor beginners van belang zijn. In deel 2 (88 blz.) komen natuurlijke, gehele en rationale getallen aan de orde. Deel 3 (76 blz.) is gewijd aan de meetkunde. Wie in details de inhoud van deze drie delen nader wil kennen, verwijs ik naar het bovengenoemde verslag. Hierna volgen nog enkele onderwerpen, die aansluiten bij het traditionele programma: vergelijkingen en vraagstukken, procentrekening, intrestrekening, metriek stelsel, oppervlakten en inhouden. En tot slot worden enige historische bijzonderheden

gegeven over de ontwikkeling van het cijferschrift en enkele spelletjes, die op de binaire schrijfwijze van de natuurlijke getallen berusten.

De Belgen kunnen zich gelukkig prijzen, dat een aantal schrijvers zich de moeite gegeven heeft in teamwork dit boek tot stand te doen komen. Het is een gedegen stuk werk. Ook de uitgever heeft het zijne bijgedragen door een vijftiental figuren in kleuren uit te voeren, hetgeen de duidelijkheid zeer bevordert.

Eén ding zou ik nog graag willen vermelden, wat mij opgevallen is en niet door Bouqué in zijn voordracht vermeld werd. Dat is de fraaie manier, waarop de vermenigvuldiging en de deling in het stelsel van de gehele getallen worden uiteengezet. In bijgaande figuur is toegelicht de vermenigvuldiging met 3 en met — 3. Men denkt zich in de oorsprong een lamp L; in het punt 1 van een horizontale as is een diapositief geplaatst, loodrecht op deze as. In het punt 3 resp. — 3 van deze as is een scherm loodrecht opgericht. Vermenigvuldigen met 3 resp. — 3 is nu niets anders dan projectie van het diapositief op het corresponderende scherm.



Men kan deze manier ook goed gebruiken bij het vermenigvuldigen en delen van rationale getallen. Men kan zo toelichten, dat $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$; men ziet, dat elk getal met 0 vermenigvuldigd 0 oplevert en dat deling door 0 niet mogelijk is, enz.

Tot slot nog één opmerking. Bij het taalonderwijs wint tegenwoordig de overtuiging veld, dat men de grammatica zich eigen maakt door met de taal te manipuleren en min of meer aan de taal de regels te ontdekken. Merkwaardig is hier en ook bij anderen het streven om de omgekeerde weg te bewandelen en de logica, dat is de grammatica van de wiskundige taal, in een afzonderlijk hoofdstuk aan de beoefening van de wiskunde vooraf te laten gaan. Is men hiermee uit didactisch oogpunt wel op de goede weg?

P. G. J. Vredenduin

Dr. D. van Hiele-Geldof en G. Krooshof, met medewerking van Dr. P. M. van Hiele en Dr. J. de Miranda, *Wiskunde voor de M.M.S.*, Deel II^{A}, J. B. Wolters, Groningen, 1963, 125 blz., *f* 3,90.

Het gebruik van de serie „Wiskunde voor de M.M.S." werd op de m.m.s.-afdeling van het lyceum bemoeilijkt door de slechte aansluiting bij de „h.b.s."-wiskunde

van de onderbouw. Dit deel II^A is een poging om deze moeilijkheid op te heffen. Een poging die zeer geslaagd mag heten. In dit deel II^A komen verschillende onderwerpen uit deel I en de meeste uit deel II aan de orde. Na het doorwerken van deel II^A kan men weer gewoon op deel III overstappen.

Men mene niet, dat de hoofdstukken van deel II^A zonder meer uit de andere delen zijn overgenomen. Integendeel, alles is opnieuw doordacht en deels herschreven, waardoor dit deel een zeer goede eenheid vormt. Het moet voor vele meisjes, vooral voor hen die in de eerste klas wat moeite met wiskunde hadden, een verademing zijn, met dit moderne boek te kunnen werken.

Het lijkt mij ook zeer juist gezien om met ruimtefiguren te beginnen en dan niet te volstaan met enkele weinig ter zake doende bijzonderheden, maar ook meteen over de symmetrie-eigenschappen van die figuren te praten. Dat het spiegelen de meisjes wel zal aanspreken blijkt uit de geestige foto op pag. 15.

Van de vele goede vondsten in dit boek wil ik alleen nog noemen het invoeren van coördinaten in het platte vlak en het gebruik dat hiervan gemaakt wordt bij de afbeeldingen. Met veel interesse heb ik hoofdstuk 12: Afbeeldingen (in de andere delen transformaties genoemd) doorgelezen; het lijkt mij bijzonder goed gelukt.

Niemand verzuime van dit boek kennis te nemen.

De uitvoering is fraai. R. Troelstra.

Drs. P. E. Lepoeter, *Gids voor de analytische meetkunde van de b-afdelingen van het v.h.m.o.*, J. M. Meulenhof, Amsterdam, 1963; 131 bladz.; in geplasticeerde band, *f* 5,90.

Door deze „*Gids voor de analytische meetkunde*" is het aantal goede leerboeken voor dit vak met één vermeerderd. Bij het doorlezen merkt men onmiddellijk, dat dit boek door een ervaren leraar is samengesteld. De leerstof wordt op traditionele wijze en zeer duidelijk behandeld. Enkele details die mij opgevallen zijn laat ik hier volgen.

De „meetkundige" afleiding van de afstand van een punt tot een lijn is bijzonder aardig. De translatie wordt beschouwd als verschuiving van de kromme, niet van het assenstelsel. Ik vraag me nog steeds af, welke van de twee opvattingen hier didactisch de beste is. Bij de lijnenbundels wordt terecht opgemerkt, dat de bundels $L_1 + \lambda L_2 = 0$ en $\lambda' L_1 + L_2 = 0$ niet identiek zijn. De opmerking, dat men „bij wijze van spreken" $\lambda = \infty$ kan nemen wordt gelukkig in de volgende zin alweer door de schrijver teruggenomen. Maar waarom niet geschreven $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$? Kan men bij verzamelingen inderdaad met recht beweren: „De parameter-methode wordt gebruikt bij vraagstukken over verzamelingen die als „bewegingsvraagstukken" kunnen worden opgevat" (pag. 75)? Net als in de meeste schoolboeken wordt bij de afleiding van de vergelijking van de ellips en bij die van de hyperbool onbekommerd gekwadrateerd, zonder zich om zoiets als gelijkwaardigheid druk te maken. Dat nemen we onze leerlingen bij het vak algebra meestal erg kwalijk.

Overigens: Een duidelijk boek, waarvan de bruikbaarheid door het grote aantal vraagstukken nog wordt vergroot.

De uitvoering is zeer goed. R. Troelstra

A. Bartels, *Een Eeuw Middelbaar Onderwijs*, 1863—1963; J. B. Wolters, Groningen 1963; 279 blz. geb. *f* 17,50.

Zeer veel lezers van Euclides zullen reeds kennis genomen hebben van dit historisch werk dat, dank zij het initiatief van de Raad van Leraren, voor de leden van de diverse bij de Raad aangesloten organisaties bij voorintekening verkrijgbaar werd gesteld. Van belang is Bartels' werk echter voor ieder die op enige wijze

bij het middelbaar onderwijs betrokken is, ook voor hen die reeds in het bezit mochten zijn van het eerder verschenen „*75 jaar Middelbaar Onderwijs*, 1863—1938" van dezelfde auteur. De lotgevallen van de laatste kwart eeuw zijn belangwekkend; „in de eerste plaats waren er de gebeurtenissen gedurende de periode van de bezetting . . . en vervolgens het vele dat na 1945 tot stand is gekomen, zoals de wettelijke regeling van de middelbare scholen voor meisjes, van de handelsdagscholen en handelsavondscholen, het schuchtere begin van de pedagogisch-didactische voorbereiding voor het leraarsambt en als klap op de vuurpijl de na zestig jaar van voorbereiding tot stand gekomen algemene herziening van de wet", aldus het „Woord vooraf".

Bartels' werk behandelt de uiterlijke vorm van het onderwijs. De schrijver drukt de hoop uit dat de ontwikkeling van het eigenlijke onderwijs zal worden beschreven door deskundigen op de terreinen van de onderscheiden leervakken. Door Dr. W. Kuiper is hiermee reeds een begin gemaakt voor het vak Duits, een soortgelijke studie voor het vak Frans is in bewerking. Het is te hopen, dat voor de wiskunde eens een soortgelijke studie zal worden ondernomen. Voor wiskundedocenten met historische belangstelling ligt hier een terrein van onderzoek braak. De status van het wiskunde-onderwijs op de h.b.s. gedurende de honderd jaar van zijn bestaan, de evolutie van het schoolvak met de achtergronden van deze evolutie bieden belangwekkende stof tot studie. Ook voor de mechanica is er plaats voor een onderzoek naar de ontwikkeling van dit vak, aanvankelijk omschreven als „beginselen van de theoretische en toegepaste mechanica, van de kennis van werktuigen en van de technologie".

De betekenis die de wiskunde in Thorbecke's schepping heeft gehad, blijkt o.a. uit het feit dat de wiskunde het enige vak was van het nieuwe schooltype waarvoor in de memorie van toelichting een stofomschrijving werd gegeven.

In het hoofdstuk „Toezicht" geeft de auteur van alle inspecteurs die thans niet meer in functie zijn een aantal biografische bijzonderheden. In deze opsomming is echter één lacune, waarschijnlijk te wijten aan de bescheidenheid van de auteur.

In Bartels' boek is een brochure ingelegd, die de drie voordrachten bevat welke op 2 mei 1963 te Zwolle werden gehouden bij de herdenking van het feit dat honderd jaar tevoren Thorbecke's Middelbaar Onderwijswet door de volksvertegenwoordiging werd aangenomen. Prof. Dr. Ph. J. Idenburg sprak er over „*Thorbecke's Middelbaar Onderwijswet*", Dr. J. Karsemeijer over „*De Wet-Thorbecke op het Middelbaar Onderwijs* (1863) *in de praktijk*" en de Staatssecretaris Prof. Dr. H. H. Janssen over „*Van Middelbaaronderwijswet* 1863 *tot Mammoetwet* 1963".

In geen bibliotheek van een middelbare school en in geen lerarenbibliotheek mag Bartels' indringende, betrouwbare, historische oriëntatie ontbreken.

Joh. H. Wansink.

Howard E. Taylor and Thomas L. Wade, *University Freshman Mathematics with algebra and trigonometry*, John Wiley and Sons, New York-London, 1963, 369 pag., geb. 55 sh.

De auteurs verzetten zich tegen het streven aan jonge leerlingen differentiaal- en integraalrekening te onderwijzen op gammele grondslag. De bedoeling van hun boek is de overgang van de moderne high school wiskunde tot de universitaire calculus en moderne algebra op verantwoorde wijze tot stand te brengen. In het boek komen successievelijk aan de orde: de beginselen van de verzamelingsleer, de getallensystemen, het functiebegrip, systemen van lineaire vergelijkingen,

vectoren, matrices en determinanten, volledige inductie en het binomium van Newton, veeltermen, exponentiële en logaritmische functies, trigonometrische functies en hun inversen en tot slot „driehoeksmeting".

Een degelijk boek, waarvan de compositie steunt op veel experimenteel werk dat in de Verenigde Staten is verzet terwille van een verantwoorde modernisering van het wiskundeonderwijs. Joh. H. Wansink.

Prof. Dr. H. R. Müller, *Kinematik*, Sammlung Göschen, Band 584/584a, Walter de Gruyter, Berlin 1963, 170 blz., ingen. D.M.5,80.

Dit boekje bevat een uitvoerige behandeling van de vlakke kinematica en een zeer beknopt gehouden behandeling van de ruimtelijke, waarin de analytische behandelingswijze op de voorgrond treedt.

Een goede gids. Joh. H. Wansink.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

118. In vier laadjes bevinden zich resp. drie witte knikkers, twee witte en een zwarte, een witte en twee zwarte, drie zwarte. De laadjes zijn van etiketten voorzien, waarop hun inhoud vermeld is. De vier etiketten zijn op zodanige manier verwisseld dat geen enkele meer op het bijbehorende laadje zit. Door een aantal keren een knikker uit een van de laadjes te trekken, moet men de inhoud van de vier laadjes te weten zien te komen. Gevraagd wordt nu:

a. als men een maximale hoeveelheid geluk heeft, door het trekken van hoeveel knikkers kan men dan zijn doel bereiken?

b. als men een maximale hoeveelheid intelligentie heeft, door het trekken van hoeveel knikkers kan men dan in ieder geval zijn doel bereiken?

119. We stapelen een aantal lucifers zo op, dat elke lucifer alle andere aanraakt. Laat zien, dat dit met zes lucifers mogelijk is.

Als een van de lezers mij kan helpen aan een bewijs, dat het niet met meer dan zes lucifers mogelijk is (of een groter maximum kan aantonen), dan houd ik mij aanbevolen. Ik kan het niet vinden. (P. G. J. V.)

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

116. Pas de vier stukken zo aan elkaar, dat ze twee aan twee een van de evenwijdige zijden gemeen hebben en met zijn vieren een koker vormen.

117. We gaan na, wat de winnende en wat de verliezende aantallen zijn. We beginnen bij 7. Degeen, die een stapel van 7 lucifers afgeeft aan de ander, wint. Immers neemt de ander er 1 weg, dan neemt hij er daarna 3; neemt de ander er 2, dan neemt hij de resterende 5, enz. We noteren dit: 7^+.

Als iemand 8 lucifers afgeeft, dan neemt de ander er 1, waarna de ander wint. Is dit niet mogelijk, doordat 1 juist geblokkeerd is, dan neemt de ander er 4, waarna het spel onbeslist blijft (wegens daarna nemen van 2 resp. 1 lucifer). Uit het vervolg zal men zien, dat dit geval zich in de praktijk bij ideale speelwijze niet voordoet. We noteren $8 - 1^-$ resp. $8 - 4$ remise.

Als iemand 9 lucifers afgeeft, neemt de ander er 2 of 3; in beide gevallen wint de ander dan. Dus leidt het afgeven van 9, onverschillig welk aantal geblokkeerd is,

steeds tot verlies. We noteren: 9 — 2^-, 3^-, dus 9^-.

Zo gaan we door. We krijgen dan de volgende mogelijkheden:

7^+
8 — 1^-
8 — 4 remise
9 — 2^-, 3^-, dus 9^-
10 — 3^-, 5^-, dus 10^-
11 — 4^-
anders (d.w.z. als 4 geblokkeerd is) 11^+
12 — 5^-
anders 12^+
13^+
14 — 1^-
anders 14^+
15 — 1^-, 2^-, dus 15^-
16 — 3^-
anders 16^+
17 — 4^-, 5^-, dus 17^-
18 — 5^-
anders 18^+
19 — 3^-
anders 19^+
20^+
21 — 1^-
anders 21^+
22 — 2^-, 3^-, dus 22^-
23 — 3^-, 5^-, dus 23^-
24 — 4^-
anders 24^+

Omdat 20 tot en met 24 geheel parallel loopt met 7 tot en met 11 en elke volgende situatie ondubbelzinnig bepaald is door de voorafgaande 5, zullen nu steeds dezelfde 13 situaties achtereenvolgens optreden. De winnende standen zijn dus, 7, 13, 20, 26, 33, 39, enz. Als de beginspeler een ander aantal krijgt, waarvan hij enige lucifers nog mag afnemen, zal hij winnen. Krijgt hij juist een van deze aantallen, dan is hij verplicht een ander aantal af te geven en zal hij verliezen. De ideale speelwijze volgt uit de tabel.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand.

MATHEMATISCH CENTRUM

Oriënterend Wiskunde Colloquium voor docenten V.H.M.O.

Evenals in de vorige jaren zal in de cursus 1964/65 aan het Mathematisch Centrum een Oriënterend Wiskunde Colloquium voor wiskunde-docenten V.H.M.O. in Amsterdam en omgeving worden gehouden.

De commissie van wiskunde-docenten, die het colloquium organiseert, heeft als onderwerp gekozen:

Groepentheorie en lineaire algebra.

De stof zal worden behandeld in een langzaam tempo en vanaf een zeer elementair niveau. Het is de bedoeling dat zowel leraren als medewerkers van het Mathematisch Centrum als spreker zullen optreden, eventueel afgewisseld door hoogleraren-sprekers.

Aan de orde worden gesteld de beginselen van de moderne algebra (i.h.b. groepen en ringen) en van de lineaire algebra (vectorruimten, lineaire transformaties, toegespitst op stelsels lineaire vergelijkingen). Indien de tijd zulks toelaat zal ook aandacht worden geschonken aan de Galois-theorie en zijn toepassingen op hogere machtsvergelijkingen.

Ter nadere informatie dient het volgende:

1. de bijeenkomsten zullen in principe twee keer per maand worden gehouden, nl. op de *eerste* en *derde woensdagavond* en wel van 19.45—21.30 uur (precies). De eerste bijeenkomst zal plaatsvinden op woensdagavond 7 *oktober a.s.* in het gebouw van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam (O).
2. aan de deelnemers zal een uitgebreide syllabus met literatuuropgaven worden verstrekt.
3. voor hen die buiten Amsterdam wonen bestaat de mogelijkheid reiskosten te declareren.

Aanmelding voor dit colloquium gaarne vóór 23 september a.s. aan de Administratie van het Mathematisch Centrum [1]).

ACHTTIENDE AMSTERDAMSE UNIVERSITEITSDAG OP ZATERDAG 17 OKTOBER 1964

Op zaterdag 17 oktober 1964 organiseert de Amsterdamse Universiteits-Vereniging de 18de Amsterdamse Universiteitsdag.

Bovendien zal op deze dag het 75-jarig bestaan van de Vereniging worden herdacht.

Des morgens te elf uur precies zullen de deelnemers in de Aula (Lutherse Kerk, Singel 411, hoek Spui) worden welkom geheten door de Voorzitter der Vereniging Dr. M. W. Holtrop, waarna de opening zal geschieden door de Rector Magnificus Prof. Mr. J. van der Hoeven.

Daarna zal de Heer Drs. E. H. van der Beugel een voor alle deelnemers bestemde rede uitspreken over:

EUROPESE POLITIEKE UNIE EN ATLANTISCHE SAMENWERKING

Na afloop van de ochtendbijeenkomst biedt het Presidium van de Universiteit van Amsterdam een ontvangst aan in het Maagdenhuis, Spui 21.

Des namiddags van 2—5 uur worden voor alle faculteiten colleges gegeven; o.a. Prof. Dr. H. A. Lauwerier: Symmetrie en regelmaat. Wiskundige bespiegelingen over kunst. Prof. Dr. S. A. Wouthuysen: Asymmetrie en regelmaat. Natuurkundige bespiegelingen over materie.

Om zes uur bestaat gelegenheid gezamenlijk te dineren in Krasnapolsky; de avond zal worden besloten met toneel en cabaret door de Amsterdamse Studenten Toneelvereniging, eveneens in Krasnapolsky.

Ook echtgenoten van alumni(ae) zijn op deze dag van harte welkom.

Nadere inlichtingen voor de belangstellenden zijn te verkrijgen bij de secretaresse van de Amsterdamse Universiteits-Vereniging, Mevr. Mr. A. E. Prakken-Bukers, Minervalaan 73" Amsterdam-Z.

Amsterdamse alumni(ae) die geen jaarlijkse circulaire betreffende de Universiteitsdag ontvangen, wordt vriendelijk verzocht hun tegenwoordig adres op te geven bij het secretariaat.

---

[1]) De circulaire werd te laat ontvangen voor opname in het september-nummer (red.).

De formule $\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$

door

J. C. VAN RHIJN
Vollenhove

De straal v/d cirkel is 1. De koorden, behorend bij de middelpuntshoeken 2φ en 6φ stelt men resp. p en q. Dan is $EF = q - 2p$.

Uit $\triangle OEF \backsim \triangle OBC$ volgt

$$OE = \frac{q - 2p}{p}, \text{ zodat } BE = 1 - \frac{q - 2p}{p} = \frac{3p - q}{p}.$$

Uit $\triangle ABE \backsim \triangle OAB$ volgt:

$$\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{OA}, \text{ d.i. } \frac{3p - q}{p^2} = p, \text{ dus } q = 3p - p^3.$$

Wegens $p = 2 \sin \varphi$ en $q = 2 \sin 3\varphi$ gaat dit over in:

$$\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi.$$